

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Информационные технологии»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения контрольной работы по дисциплине

«Вычислительная математика»

Ростов-на-Дону

2023

УДК 621.313: 518.6

Составители: Б.В. Соболь, В.Ю. Паниотова

Методические указания для выполнения контрольной работы по дисциплине «Вычислительная математика» / сост. Б.В. Соболь, В.Ю. Паниотова. - Ростов-на-Дону: Донской гос. техн. ун-т, 2023. – 20 с.

Содержат рекомендации по выполнению контрольной работы. Представлены численные методы решения нелинейных уравнений, аппроксимации функций, численного интегрирования. Материал по каждой теме содержит краткую теоретическую справку и примеры решения типовых задач тремя способами: непосредственным вычислением, средствами табличного процессора Excel и программированием на языке Python.

Предназначены для обучающихся направлений 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 09.03.03 «Прикладная информатика», 09.03.04 «Программная инженерия», 44.03.04 «Профессиональное обучение (по отраслям)» всех форм обучения.

УДК 621.313: 518.6

Печатается по решению редакционно-издательского совета

Донского государственного технического университета

Ответственный за выпуск зав. кафедрой «Информационные технологии», д-р техн. наук, профессор Б.В. Соболь

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

В печать 20.04.2023 г.

Формат 60×84/16. Объем 0,7 усл. п. л.

Тираж 50 экз. Заказ № 678

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Издательский центр ДГТУ

Адрес университета и полиграфического предприятия:

344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

© Донской государственный технический университет, 2023

1. Методические указания

К каждому заданию приводится пример выполнения с подробными пояснениями и варианты материалов для самостоятельной работы.

Задания являются типовыми. Поэтому можно использовать содержимое файла для оформления контрольной работы (чтобы не набирать текст вручную).

Контрольная работа оформляется по схеме:

Титульный лист контрольной работы по шаблону (можно распечатать шаблон и вручную вписать ФИО, группа, дисциплина и т.д.).

Задание 1. Отделить корни уравнения cos 3*x* – *x*3 = 0 (свой вариант).

Решение. Построим таблицу значений функции *y* = cos 3*x* – *x*3 . (свой вариант, и дальше вставлять свои таблицы и графики, которые получаются).

Задание 2. Уточнить методом бисекций с точностью до 0,01 корень уравнения cos 3*x* – *x*3 = 0 (свой вариант), принадлежащий отрезку […; …] (отрезок, найденный в первом задании). Решение в программе *Excel*:

1. В ячейках *A*1:*F*4 введем обозначения, начальные значения и формулы, как показано в таблице 2.1.
2. Каждую формулу скопируем в нижние ячейки маркером заполнения до десятой строки, т.е. *B*4 — до *B*10, *C*4 — до *C*10, *D*3 — до *D*10, *E*4 — до *E*10, *F*3 — до *F*10.

Рекомендации к выполнению

1. Сначала выполнить решение примера, затем внести изменения в соответствии с вариантом задания.
2. Скопировать файл с решением примера и внести изменения: заменить уравнение, таблицы, графики и т.д. на те, которые Вы получили для своего варианта (в файле они выделены).

Задание 1. Отделение корней графическим методом Пример 1.1. Отделить корни уравнения sin5*x + x*2 – 1 = 0.

Решение. Для отделения корней уравнения естественно применять графический метод. График функции *y* = *f*(*x*) с учетом свойств функции дает много информации для определения числа корней уравнения *f*(*x*) = 0.

1. Построим для примера 1.1 график функции в программе *Excel* на отрезке [–1, 2] с шагом изменения аргумента *h* = 0,1. Для этого выполним следующие действия в программе *Excel*:
2. В диапазоне *A*2:*A*32 введем значения переменной *x*. Для этого в ячейке *A*2 запишем –1, в ячейке *A*3 — значение –1,9. После этого выделим диапазон *A*2:*A*3 и с помощью маркера заполнения (вниз) присвоим значения остальным ячейкам до ячейки *A*32.
3. В ячейку *B*2 введем формулу =SIN(5\**A*2)+*A*2^2–1 и скопируем *B*2 с помощью маркера заполнения в остальные ячейки до ячейки *B*32.
4. Выделим диапазон *A*2:*B*32 и с помощью мастера диаграмм (тип диаграммы «Точечная, точечная диаграмма со значениями, соединенными отрезками без маркеров») построим график функции.

Полученный график представлен на рис. 1.1.

-2

5

,

-1

-1

-0

,

5

0

0

,

5

1

-1

5

,

-0

0

0

,

5

1

1

,

5

*y = f*

(

*x*

)

Рис. 1.1.

Из графика видно, что на отрезке [0; 0,5] есть два корня. Из таблицы *A*2:*B*32 значений функции заключаем, что уравнение имеет четыре корня в интервалах [–0,8; –0,7], [0,2; 0,3], [0,4; 0,5], [1,1; 1,2].

До настоящего времени графический метод предлагалось применять для нахождения грубого значения корня или нахождения интервала, содержащего корень, и затем применять итерационные методы, т.е. методы последовательных приближений для уточнения значения корня. С появлением математических пакетов и электронных таблиц стало возможным вычислять таблицы значений функции с любым шагом и строить графики с высокой точностью. Это позволяет уточнять очередной знак в приближенном значении корня при помощи следующего алгоритма:

1. Если функция *f*(*x*) на концах отрезка [*a*, *b*] принимает значения разных знаков, то делим отрезок на 10 равных частей и находим ту часть, которая содержит корень (таким способом мы можем уменьшить длину отрезка, содержащего корень, в 10 раз).
2. Повторим действия предыдущего пункта для полученного отрезка.

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше заданной погрешности.

Пример 1.2.Вычислить графически с точностью до 0,0001 корень уравнения sin5*x + x*2 – 1 = 0, принадлежащий интервалу (0,4; 0,5).

Решение. Построим график функции *y* = sin5*x + x*2 – 1 на отрезке

[0,4; 0,5] с шагом *h* = 0,01 (делим отрезок на 10 частей) в программе *Excel*:

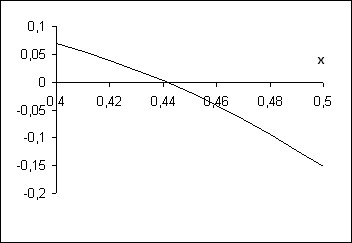
1. В диапазоне *A*2:*A*12 введем значения переменной *x*. Для этого в ячейке *A*2 запишем 0,40, в ячейке *A*3 — значение 0,41. После этого выделим диапазон *A*2:*A*3 и с помощью маркера заполнения присвоим значения остальным ячейкам до ячейки *A*12.
2. В ячейку *B*2 введем формулу =SIN(5\**A*2)+*A*2^2–1 и скопируем *B*2 с помощью маркера заполнения в остальные ячейки до ячейки *B*12.
3. Выделим диапазон *A*2:*B*12 и с помощью мастера диаграмм (тип диаграммы “Точечная”!) построим график функции.

Лист *Excel* отображен на рис. 1.3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | С | D | E | F | G | H |
| 1 | x | y |  | |  |  |  |  |
| 2 | 0,4 | 0,069297 |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 0,41 | 0,055462 |  |  |  |  |  |  |
| 4 | 0,42 | 0,039609 |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 0,43 | 0,021799 |  |  |  |  |  |  |
| 6 | 0,44 | 0,002096 |  |  |  |  |  |  |
| 7 | 0,45 | –0,01943 |  |  |  |  |  |  |
| 8 | 0,46 | –0,04269 |  |  |  |  |  |  |
| 9 | 0,47 | –0,06763 |  |  |  |  |  |  |
| 10 | 0,48 | –0,09414 |  |  |  |  |  |  |
| 11 | 0,49 | –0,12214 |  |  |  |  |  |  |
| 12 | 0,5 | –0,15153 |  |  |  |  |  |  |

Рис. 1.3

Рис. 1.3 показывает, что корень находится в интервале (0,44; 0,45), так как функция меняет знак в точках 0,44 и 0,45.



Заменим значения переменной *x* на том же листе в диапазоне *A*2:*A*12, то есть вместо интервала (0,4; 0,5) подставим интервал (0,44; 0,45) с шагом *h* = 0,001. Для этого в ячейке *A*2 запишем 0,440, а в ячейке *A*3 — значение 0,441. Затем выделим диапазон *A*2:*A*3 и с помощью маркера заполнения присвоим значения остальным ячейкам до ячейки *A*12. Формулы в ячейках *B*2:*B*12 не трогаем! В результате этого получим новую таблицу значений функции, из которой получаем уточненный интервал (0,441; 0,442).

Повторив всю процедуру еще раз, заменим в диапазоне *A*2:*A*12 интервал (0,44; 0,45) на интервал (0,441; 0,442) с шагом *h* = 0,0001. Искомый корень содержится в интервале (0,4410; 0,4411). Длина этого интервала равна 0,0001 и любое число из этого интервала можно принять за приближенное значение корня с погрешностью 0,0001. Выберем середину отрезка, т.е. положим *x* ≈ 0,44105.

В таблице 1.1 приведены все три этапа уточнения корня. Здесь мы не приводим соответствующие графики, так как для отделения корня достаточно рассмотреть таблицу значений функции и найти последовательные значения переменной *x*, в которых функция изменяет знак.

Аналогично можно уточнить значения других корней данного уравнения. Для этого достаточно на том же расчетном листе вместо отрезка [0,4; 0,5] рассмотреть любой из оставшихся трех отрезков

[– 0,8; – 0,7], [0,2; 0,3], [1,1; 1,2].

Табл. 1.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1–й этап.  Интервал (0,4; 0,5) | | |  | 2-й этап.  Интервал (0,44; 0,45) | | |  | 3-й этап.  Интервал (0,441; 0,442) | | |
|  | A | B |  | A | B |  | A | B |
| 1 | x | y | 1 | x | y | 1 | x | y |
| 2 | 0,4 | 0,069297 | 2 | 0,44 | 0,002096 | 2 | 0,441 | 2,48E–05 |
| 3 | 0,41 | 0,055462 | 3 | 0,441 | 2,48E–05 | 3 | 0,4411 | –0,00018 |
| 4 | 0,42 | 0,039609 | 4 | 0,442 | –0,00206 | 4 | 0,4412 | –0,00039 |
| 5 | 0,43 | 0,021799 | 5 | 0,443 | –0,00417 | 5 | 0,4413 | –0,0006 |
| 6 | 0,44 | 0,002096 | 6 | 0,444 | –0,0063 | 6 | 0,4414 | –0,00081 |
| 7 | 0,45 | –0,01943 | 7 | 0,445 | –0,00844 | 7 | 0,4415 | –0,00102 |
| 8 | 0,46 | –0,04269 | 8 | 0,446 | –0,0106 | 8 | 0,4416 | –0,00123 |
| 9 | 0,47 | –0,06763 | 9 | 0,447 | –0,01278 | 9 | 0,4417 | –0,00144 |
| 10 | 0,48 | –0,09414 | 10 | 0,448 | –0,01498 | 10 | 0,4418 | –0,00165 |
| 11 | 0,49 | –0,12214 | 11 | 0,449 | –0,01719 | 11 | 0,4419 | –0,00186 |
| 12 | 0,5 | –0,15153 | 12 | 0,45 | –0,01943 | 12 | 0,442 | –0,00206 |

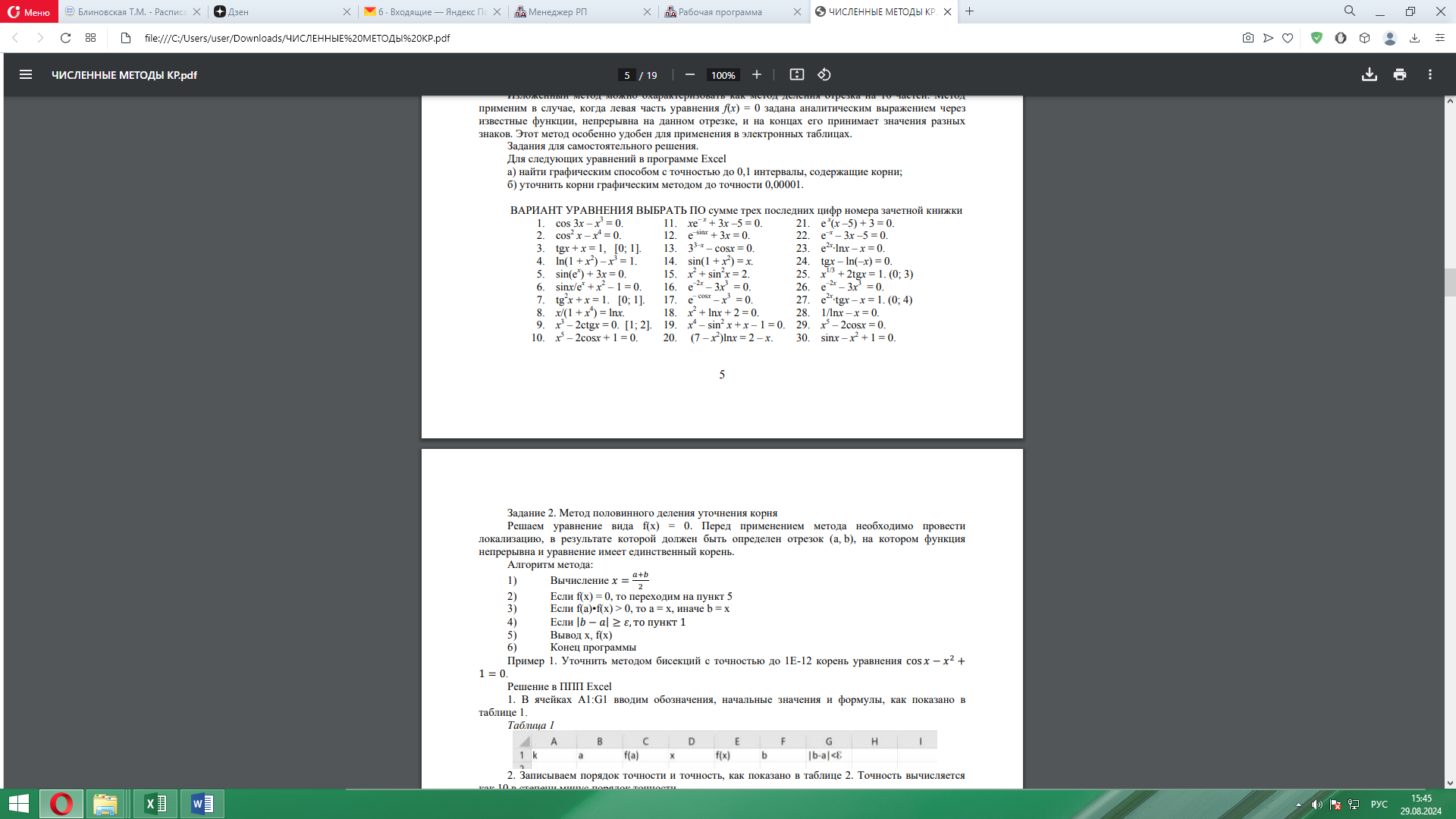
Изложенный метод можно охарактеризовать как метод деления отрезка на 10 частей. Метод применим в случае, когда левая часть уравнения *f*(*x*) = 0 задана аналитическим выражением через известные функции, непрерывна на данном отрезке, и на концах его принимает значения разных знаков. Этот метод особенно удобен для применения в электронных таблицах.

Задания для самостоятельного решения. Для следующих уравнений в программе Excel

а) найти графическим способом с точностью до 0,1 интервалы, содержащие корни;

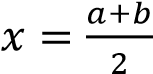
б) уточнить корни графическим методом до точности 0,00001.

ВАРИАНТ УРАВНЕНИЯ ВЫБРАТЬ ПО сумме трех последних цифр номера зачетной книжки



Задание 2. Метод половинного деления уточнения корня

Решаем уравнение вида f(x) = 0. Перед применением метода необходимо провести локализацию, в результате которой должен быть определен отрезок (a, b), на котором функция непрерывна и уравнение имеет единственный корень. Алгоритм метода:

1. Вычисление 
2. Если f(x) = 0, то переходим на пункт 5
3. Если f(a)•f(x) > 0, то a = x, иначе b = x
4. Если |𝑏 − 𝑎| ≥ 𝜀, то пункт 1
5. Вывод x, f(x)
6. Конец программы

Пример 1. Уточнить методом бисекций с точностью до 1Е-12 корень уравнения cos 𝑥 − 𝑥2 + 1 = 0.

Решение в ППП Excel

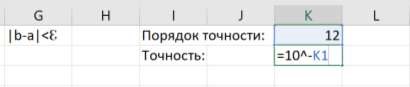
1. В ячейках A1:G1 вводим обозначения, начальные значения и формулы, как показано в таблице 1.

*Таблица 1*

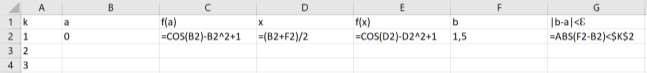


1. Записываем порядок точности и точность, как показано в таблице 2. Точность вычисляется как 10 в степени минус порядок точности.

*Таблица 2*



1. Для последовательной нумерации количества итераций в ячейке A2 записываем 1, в А3 – 2. Выделяем обе ячейки и тянем вниз на любое количество строк, взявшись за квадратик в правом нижнем углу ячейки с "2".
2. Границы а и b берем из лабораторной работы 2.1 до 5 знака и записываем их в соответствующие ячейки (В2 и F2).
3. Вычисляем в ячейке С2 f(a): наша функция от а, в ячейке D2 –– середину отрезка, равную х=(a+b)/2. F(x) аналогично f(a) в ячейке Е2.
4. В ячейке G2 условие прекращения итераций (не забываем зафиксировать порядок точности с помощью простого символа доллара «$»).
5. Таким образом все вышеперечисленные формулы будут иметь вид:



1. С2:Е2 и G2 продлеваются вниз на одну ячейку с помощью маркера в нижнем углу.
2. А вот а и b мы программируем с помощью функции ЕСЛИ. Для а:  Если f(x) = 0, то a = x.

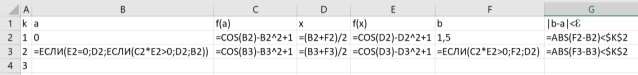
* Если f(a)\*f(x)> 0, то a = x. Иначе остаться таким же, как и было.

Для b аналогично через функцию ЕСЛИ:

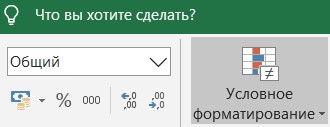
* Если f(a)\*f(x)> 0, b остаётся таким же, как и было. Иначе меняется на х.

*На этом шаге обязательно проследите, чтобы отрезок был разделен пополам. Не обе границы должны поменяться, а одна из них стать х.*

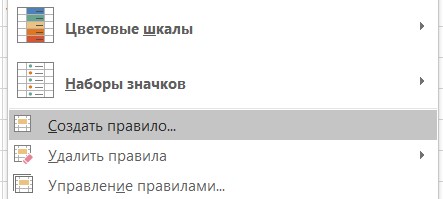
Функции в ячейках будут иметь вид:



1. Затем полностью выделяем вторую строчку и тянем ее вниз. Там, где появится слово ИСТИНА, там находится наш корень.
2. Чтобы не выводились лишние строки, удобно сделать условное форматирование. Для этого на вкладке Главная выбираем *Условное форматирование.*



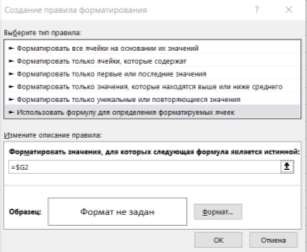
Затем *Создать правило…*



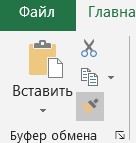
Следующий шаг – *Использовать формулу для определение форматируемых ячеек*. И забиваем формулу: если предыдущая ячейка – истина, то нам больше ничего не нужно выводить.

*Убираем знак доллара $ со строки, потому что за условие отвечает именно столбец, мы его фиксируем.*

В формате указываем белый цвет ячейки.



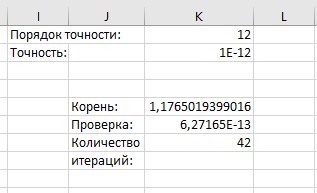
Нажимаем в левом углу на формат по образцу и выделяем всю таблицу со значениями.



В конечном итоге последующие значения ИСТИНА должны автоматически убираться. То есть если мы поменяем значение точности, то поменяется внешний вид таблицы.

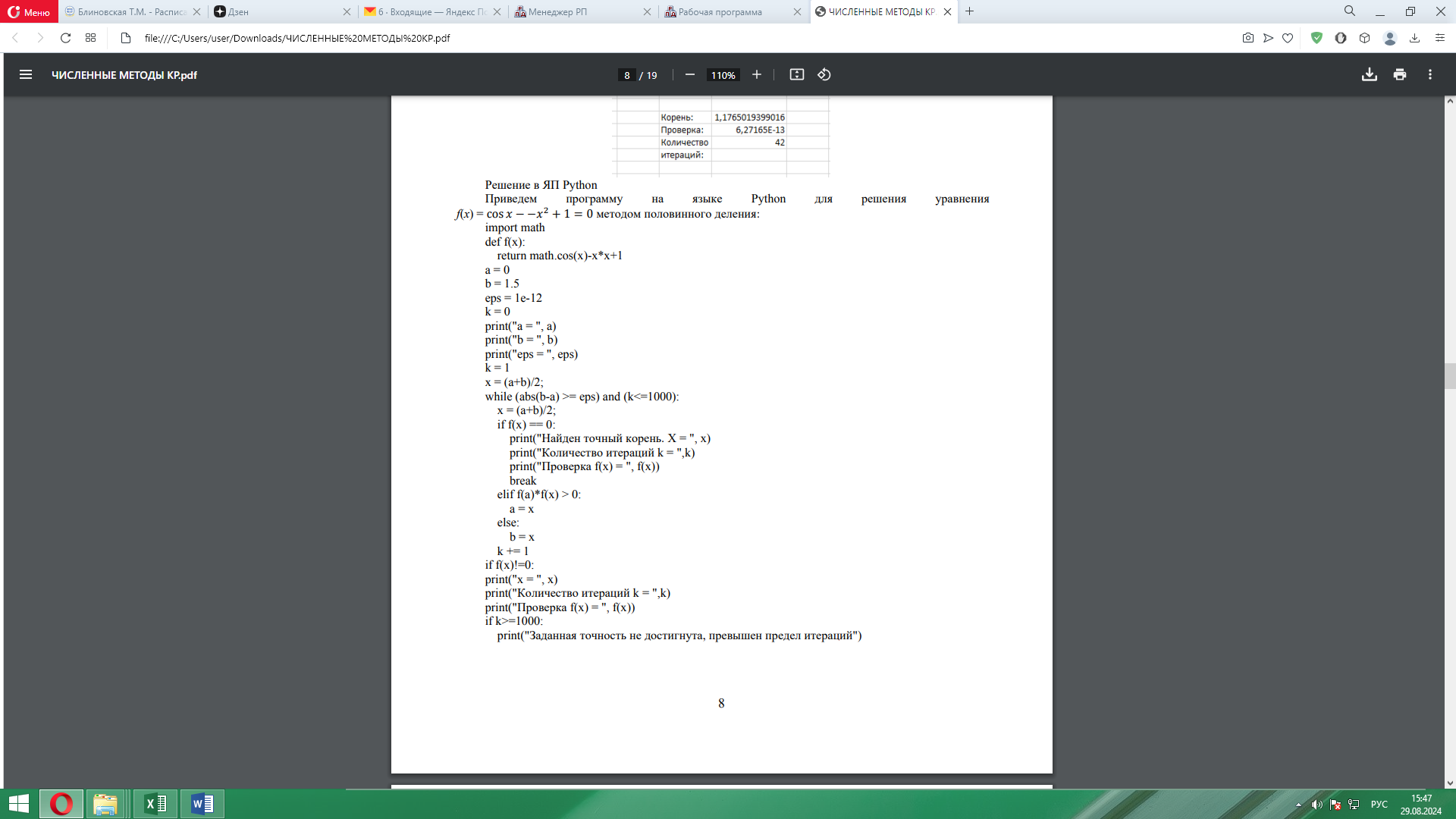
1. В ячейках K5:K8 записываем итоги:

* Корень: в ячейке K5 можно просто сослаться на нашу ячейку с х с помощью «=». Но для автоматического вывода можно использовать функции СМЕЩ и ПОИСКПОЗ. Это делается для того, чтобы в случае, когда мы меняем порядок точности, вывод значения х автоматически перескакивал на значение ИСТИНА. В выводе следите, что если вы считаете до 4 знака, то выводите хотя бы 5, если до 12 – соответственно 13 знаков после запятой, иначе значение округляется. То есть показываем на 1 знак больше, чем в порядке точности!
* Проверка: это функция f(x). Так как мы ее рассчитывали в таблице, можно либо сослаться на ячейку, либо через функции СМЕЩ и ПОИСКПОЗ.
* Количество итераций: для того, чтобы оценить какой метод быстрее работает. Также производится через ссылку на ячейку или функции СМЕЩ и ПОИСКПОЗ.

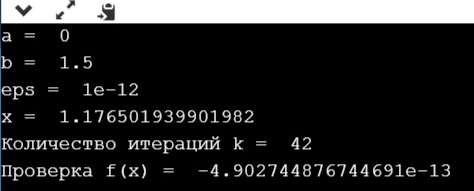


Решение в ЯП Python

Приведем программу на языке Python для решения уравнения *f*(*x*) = cos 𝑥 − −𝑥2 + 1 = 0 методом половинного деления:

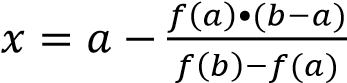


Результат работы программы для определения корня из интервала (0; 1,5) с точностью 1E-12 представлен ниже (экран компьютера):



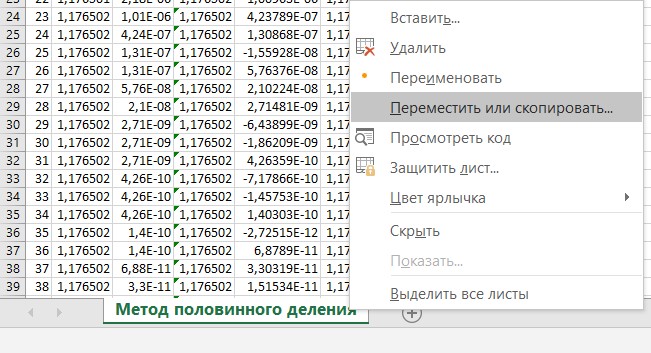
Найденное значение корня согласуются с результатом в ППП Excel.

Метод хорд Алгоритм метода:

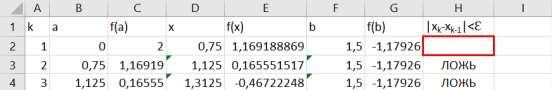
1. Вычисление 
2. Если f(x) = 0, то переходим на пункт 5
3. Если f(a)•f(x) > 0, то a = x, иначе b = x
4. Если |𝑥𝑘 − 𝑥𝑘−1| ≥ 𝜀, то пункт 1
5. Вывод x, f(x)
6. Конец программы

Отличия в решении в ППП Excel

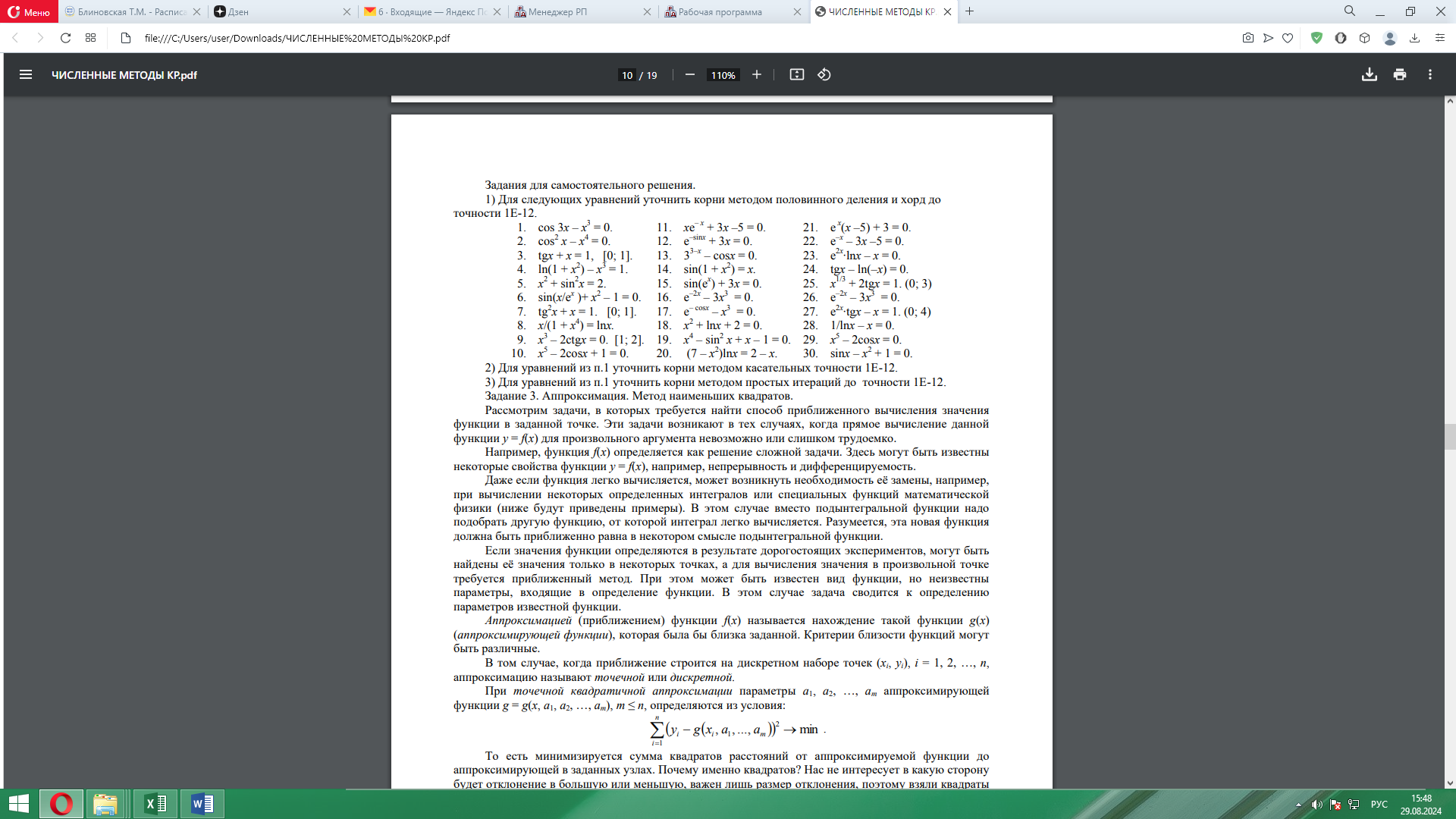
1. Для метода хорд в этом же файле кликаем на *контекстное меню* на ярлыке → *Переместить или скопировать* → Галочка перед *Создать копию* → *ОК*. У нас создастся второй лист в файле.



1. В этом методе понадобится еще f(b), поэтому после столбца со значениями b добавляем еще один.
2. В данном методе поменяется и вычисление х (потому что формула расчета другая), и условие (разность текущего и предыдущего значений).
3. В первой ячейке условия не будет, потому для нее нет предыдущего значения xk-1



Задания для самостоятельного решения.

1. Для следующих уравнений уточнить корни методом половинного деления и хорд до точности 1Е-12.
2. Для уравнений из п.1 уточнить корни методом касательных точности 1Е-12.
3. Для уравнений из п.1 уточнить корни методом простых итераций до точности 1Е-12.

Задание 3. Аппроксимация. Метод наименьших квадратов.

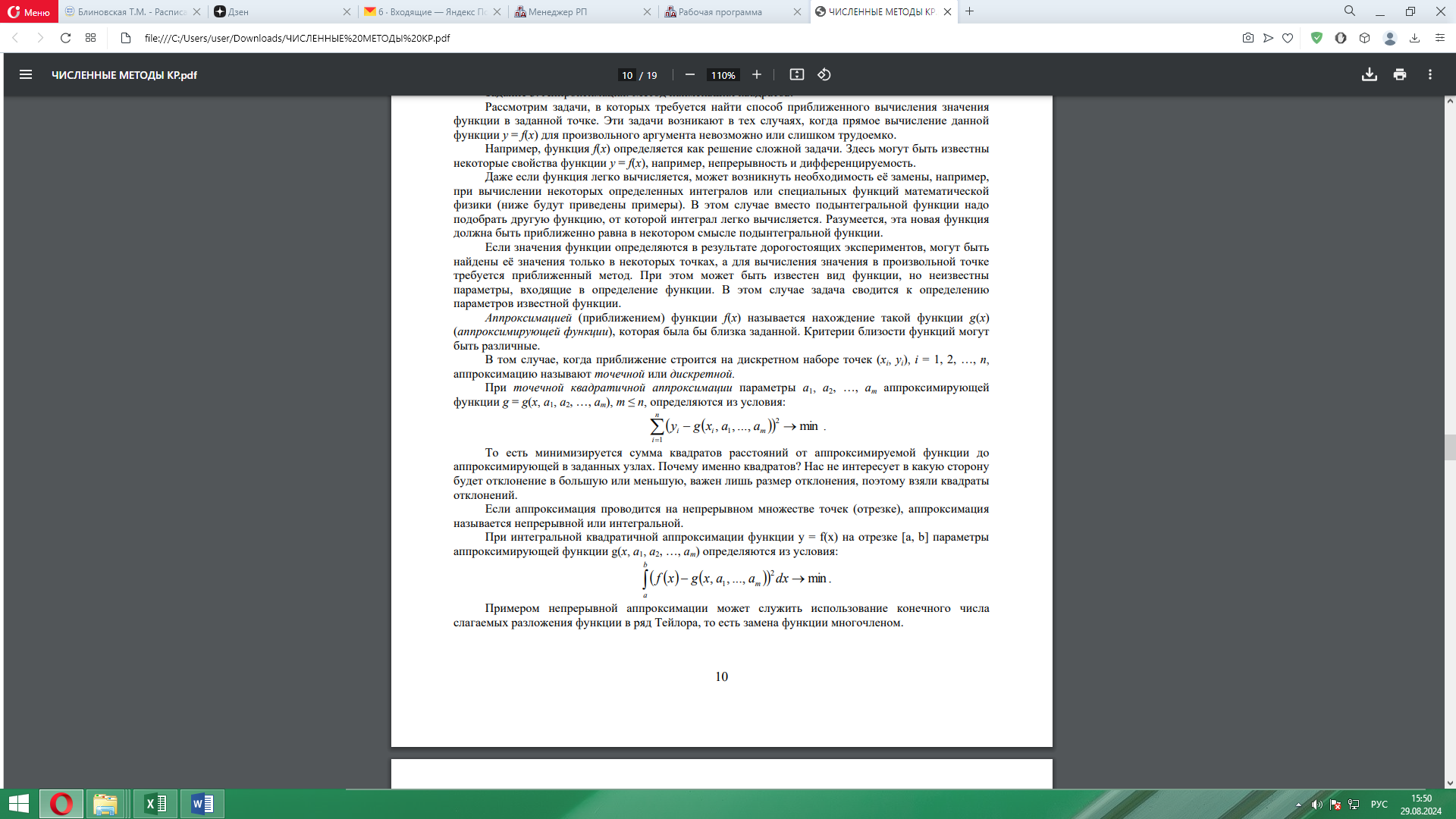
Рассмотрим задачи, в которых требуется найти способ приближенного вычисления значения функции в заданной точке. Эти задачи возникают в тех случаях, когда прямое вычисление данной функции *y* = *f*(*x*) для произвольного аргумента невозможно или слишком трудоемко.

Например, функция *f*(*x*) определяется как решение сложной задачи. Здесь могут быть известны некоторые свойства функции *y* = *f*(*x*), например, непрерывность и дифференцируемость.

Даже если функция легко вычисляется, может возникнуть необходимость её замены, например, при вычислении некоторых определенных интегралов или специальных функций математической физики (ниже будут приведены примеры). В этом случае вместо подынтегральной функции надо подобрать другую функцию, от которой интеграл легко вычисляется. Разумеется, эта новая функция должна быть приближенно равна в некотором смысле подынтегральной функции.

Если значения функции определяются в результате дорогостоящих экспериментов, могут быть найдены её значения только в некоторых точках, а для вычисления значения в произвольной точке требуется приближенный метод. При этом может быть известен вид функции, но неизвестны параметры, входящие в определение функции. В этом случае задача сводится к определению параметров известной функции.

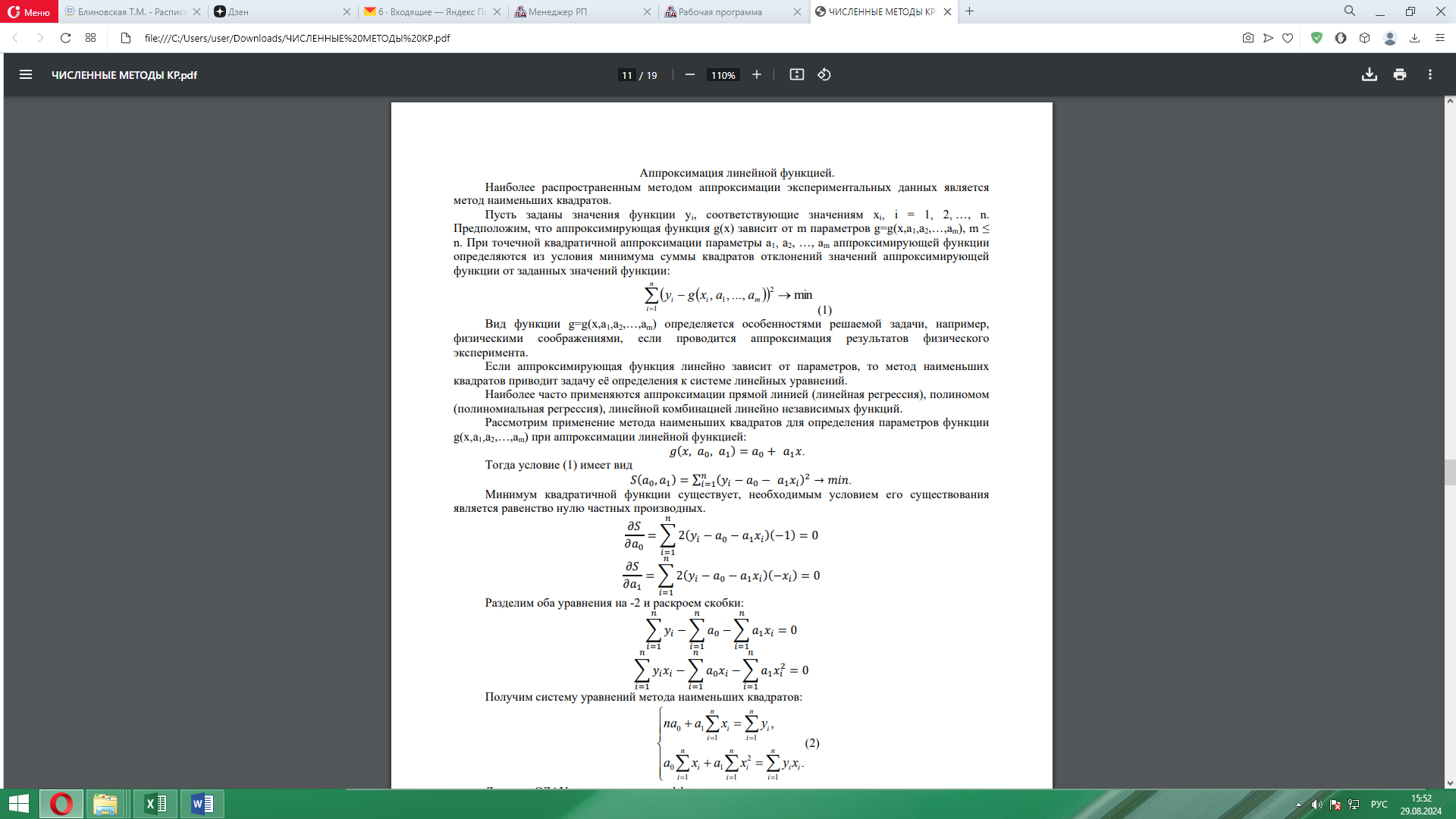
*Аппроксимацией* (приближением) функции *f*(*x*) называется нахождение такой функции *g*(*x*) (*аппроксимирующей функции*), которая была бы близка заданной. Критерии близости функций могут быть различные.

Примером непрерывной аппроксимации может служить использование конечного числа слагаемых разложения функции в ряд Тейлора, то есть замена функции многочленом.

Аппроксимация линейной функцией.

Наиболее распространенным методом аппроксимации экспериментальных данных является метод наименьших квадратов.

Пусть заданы значения функции yi, соответствующие значениям xi, i = 1, 2, …, n. Предположим, что аппроксимирующая функция g(x) зависит от m параметров g=g(x,a1,a2,…,am), m ≤ n. При точечной квадратичной аппроксимации параметры a1, a2, …, am аппроксимирующей функции определяются из условия минимума суммы квадратов отклонений значений аппроксимирующей функции от заданных значений функции:



Вид функции g=g(x,a1,a2,…,am) определяется особенностями решаемой задачи, например, физическими соображениями, если проводится аппроксимация результатов физического эксперимента.

Если аппроксимирующая функция линейно зависит от параметров, то метод наименьших квадратов приводит задачу её определения к системе линейных уравнений.

Наиболее часто применяются аппроксимации прямой линией (линейная регрессия), полиномом (полиномиальная регрессия), линейной комбинацией линейно независимых функций.

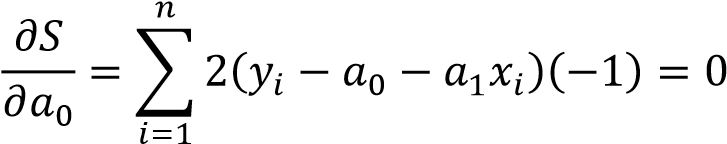
Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для определения параметров функции g(x,a1,a2,…,am) при аппроксимации линейной функцией:

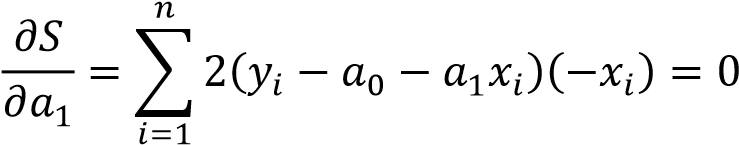
𝑔(𝑥, 𝑎0, 𝑎1) = 𝑎0 + 𝑎1𝑥.

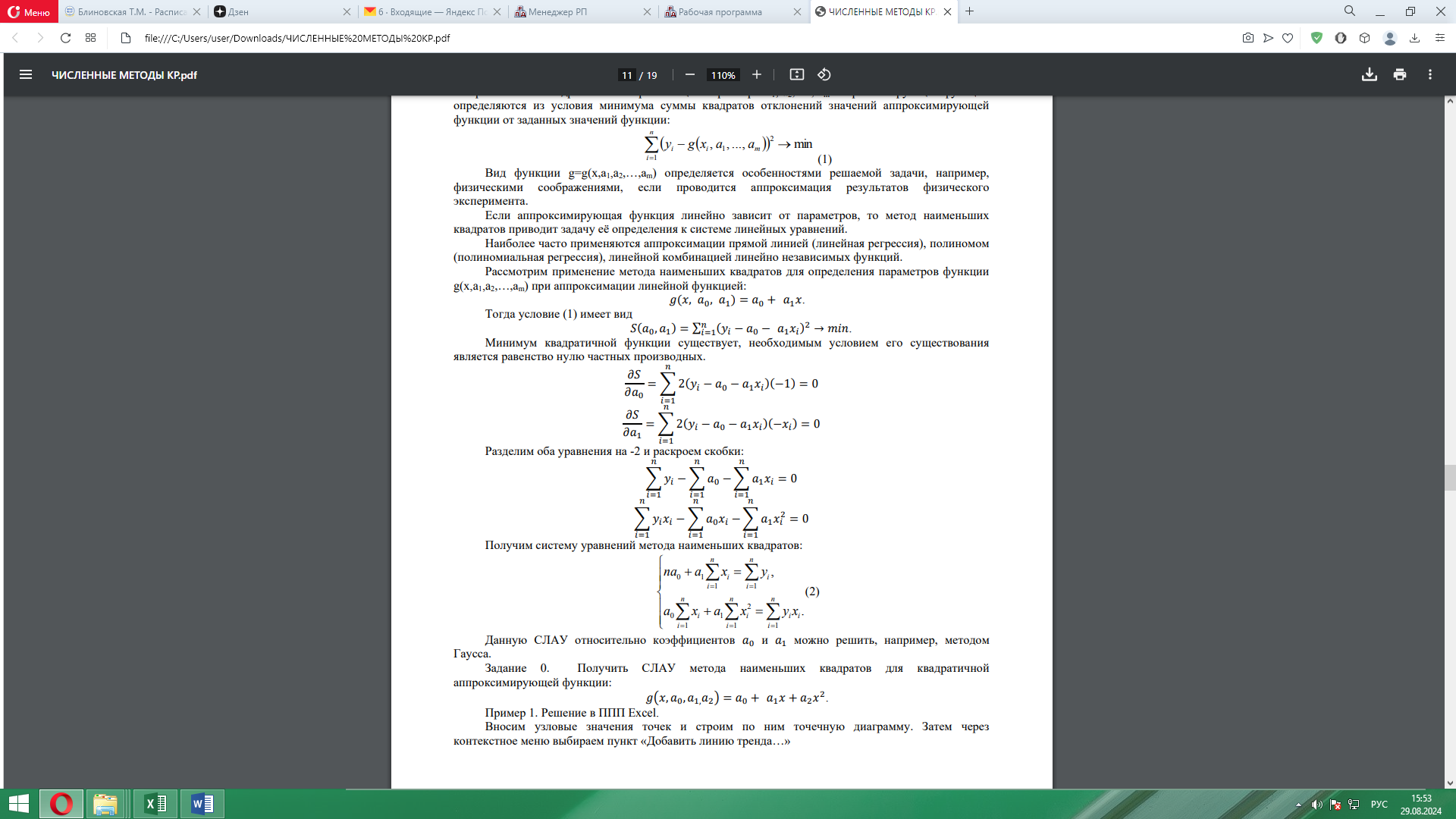
Тогда условие (1) имеет вид

.

Минимум квадратичной функции существует, необходимым условием его существования является равенство нулю частных производных.

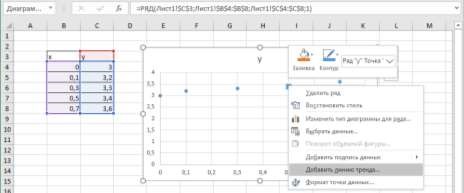






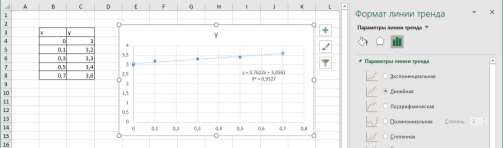
Пример 1. Решение в ППП Excel.

Вносим узловые значения точек и строим по ним точечную диаграмму. Затем через контекстное меню выбираем пункт «Добавить линию тренда…»



Затем выбираем «Линейная» и включаем переключатели «Показывать уравнение на диаграмме» и «Поместить на диаграмму величину достоверности 𝑅2.

И получаем результат.



y = 0,7622x + 3,0561

0

1

2

3

4

0

0

2

,

0

,

4

0

6

,

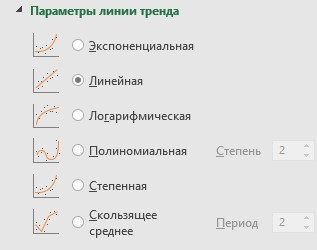
0

,

8

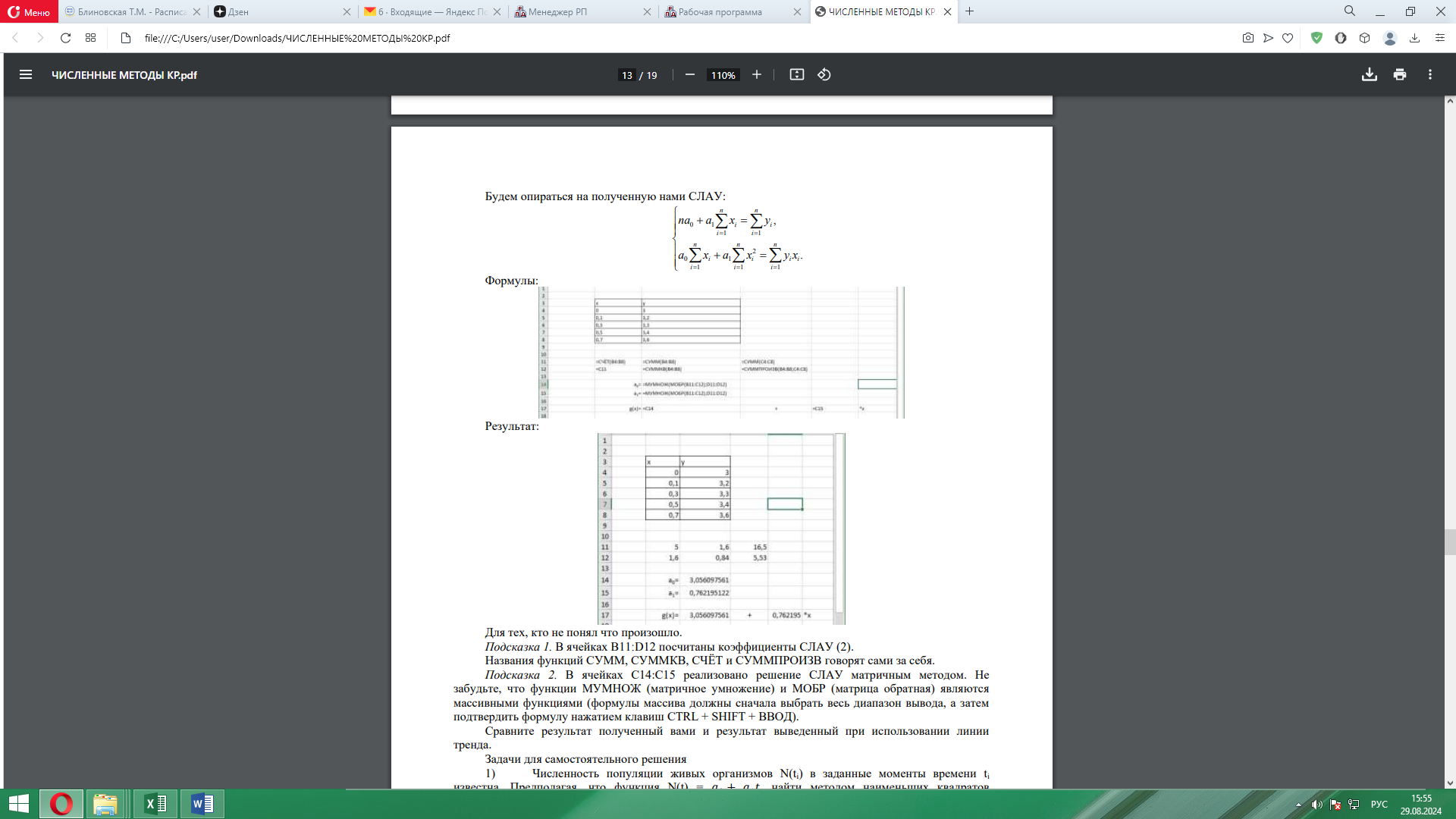
y

Всё благодаря тому, что в Excel встроена аппроксимация. Также вы можете получить линии тренда для других видов функций:

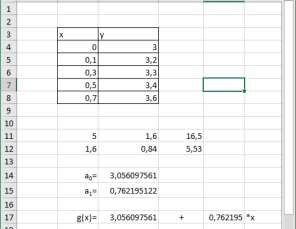


Для квадратичной аппроксимации достаточно выбрать полиноминальную линию тренда 2-й степени.

Но что же делать, если искомой функции не будет в списке? Рассмотрим пример на той же линейной функции.



Результат:



Для тех, кто не понял что произошло.

*Подсказка 1.* В ячейках B11:D12 посчитаны коэффициенты СЛАУ (2).

Названия функций СУММ, СУММКВ, СЧЁТ и СУММПРОИЗВ говорят сами за себя.

*Подсказка 2.* В ячейках С14:С15 реализовано решение СЛАУ матричным методом. Не забудьте, что функции МУМНОЖ (матричное умножение) и МОБР (матрица обратная) являются массивными функциями (формулы массива должны сначала выбрать весь диапазон вывода, а затем подтвердить формулу нажатием клавиш CTRL + SHIFT + ВВОД).

Сравните результат полученный вами и результат выведенный при использовании линии тренда.

Задачи для самостоятельного решения

1. Численность популяции живых организмов N(ti) в заданные моменты времени ti известна. Предполагая, что функция N(t) = 𝑎0 + 𝑎1𝑡, найти методом наименьших квадратов параметры 𝑎0, 𝑎1 и вычислить прогнозное значение численности на момент времени t\*.
2. Численность популяции живых организмов N(ti) в заданные моменты времени ti известна. Предполагая, что функция N(t) = 𝑎0 + 𝑎1𝑡 + 𝑎2𝑡2, найти методом наименьших квадратов параметры 𝑎0, 𝑎1, 𝑎2 и вычислить прогнозное значение численности на момент времени t\*.
3. Численность популяции живых организмов N(ti) в заданные моменты времени ti известна. Предполагая, что функция N(t) имеет вид 𝑎𝑒𝑏𝑡, найти методом наименьших квадратов параметры a, b и вычислить прогнозное значение численности на момент времени t\*.

Таблица 4.15

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № 1 | | № 2 | | № 3 | | № 4 | | № 5 | | № 6 | | № 7 | | № 8 | | № 9 | | № 10 | |
| *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* |
| 0 | 120 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 |
| 2 | 130 | 1 | 120 | 2 | 120 | 2 | 120 | 1 | 120 | 2 | 120 | 2 | 115 | 1 | 120 | 2 | 125 | 2 | 130 |
| 3 | 145 | 3 | 135 | 4 | 129 | 3 | 134 | 3 | 137 | 4 | 135 | 3 | 129 | 3 | 135 | 4 | 139 | 3 | 149 |
| 5 | 154 | 5 | 149 | 5 | 139 | 5 | 150 | 5 | 156 | 5 | 155 | 5 | 150 | 5 | 148 | 5 | 151 | 5 | 168 |
| *t\**= 6 | | *t\**= 6 | | *t\**= 6 | | *t\**= 6 | | *t\**= 7 | | *t\**= 6 | | *t\**= 6 | | *t\**= 7 | | *t\**= 6 | | *t\**= 7 | |
| № 11 | | № 12 | | № 13 | | № 14 | | № 15 | | № 16 | | № 17 | | № 18 | | № 19 | | № 20 | |
| *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* | *t* | *N* |
| 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 110 | 0 | 115 | 0 | 110 |
| 2 | 130 | 1 | 120 | 2 | 120 | 2 | 120 | 1 | 120 | 2 | 120 | 2 | 120 | 1 | 120 | 2 | 120 | 2 | 130 |
| 3 | 133 | 3 | 133 | 5 | 120 | 3 | 140 | 3 | 133 | 5 | 135 | 3 | 135 | 3 | 130 | 4 | 130 | 3 | 147 |
| 5 | 148 | 6 | 147 | 7 | 133 | 5 | 159 | 6 | 148 | 7 | 160 | 5 | 150 | 6 | 149 | 7 | 149 | 5 | 161 |
| *t\**= 6 | | *t\**= 7 | | *t\**= 8 | | *t\**= 6 | | *t\**= 7 | | *t\**= 8 | | *t\**= 6 | | *t\**= 7 | | *t\**= 8 | | *t\**= 6 | |

Определить методом наименьших квадратов коэффициенты линейной комбинации тригонометрических функций по табличным значениям

(ti, yi). Если по заданным значениям функции можно предположить (приблизительно), что y(t) нечетная, то применить в качестве аппроксимирующей функции *F*(*t*) = *a*1sin*t* + *a*2sin2*t* + *a*3sin3*t*,, а если y(t) четная, взять в качестве аппроксимирующей функции *F*(*t*) = *a*1cos*t* + *a*2cos2*t* + *a*3cos3*t*. Построить точки (ti, yi) и график функции F(t) на отрезке [–3, 3] с шагом 0,5. Варианты заданий приведены в таблицах 4.16 — 4.18.

Таблица 4.16

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № 1 | | № 2 | | № 3 | | № 4 | | № 5 | | № 6 | | № 7 | |
| *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* |
| -2,0 | -0,2 | -2,0 | -5,1 | -2,0 | -0,1 | -2,0 | -3,8 | -2,0 | 0,0 | -2,0 | -13,1 | -2,0 | 0,2 |
| -1,5 | -3,4 | -1,5 | -3,6 | -1,5 | -2,9 | -1,5 | -3,0 | -1,5 | -2,1 | -1,5 | -9,2 | -1,5 | -1,3 |
| -1,0 | -5,2 | -1,0 | 0,1 | -1,0 | -3,8 | -1,0 | -0,2 | -1,0 | -3,2 | -1,0 | -0,2 | -1,0 | -1,8 |
| -0,5 | -3,7 | -0,5 | 3,3 | -0,5 | -2,7 | -0,5 | 3,0 | -0,5 | -1,9 | -0,5 | 9,3 | -0,5 | -1,7 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 4,9 | 0,0 | -0,2 | 0,0 | 4,0 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 13,0 | 0,0 | -0,1 |
| 0,5 | 3,7 | 0,5 | 3,6 | 0,5 | 2,7 | 0,5 | 2,8 | 0,5 | 2,3 | 0,5 | 9,2 | 0,5 | 1,3 |
| 1,0 | 4,9 | 1,0 | 0,2 | 1,0 | 4,1 | 1,0 | -0,1 | 1,0 | 3,2 | 1,0 | 0,1 | 1,0 | 1,8 |
| 1,5 | 3,4 | 1,5 | -3,6 | 1,5 | 3,0 | 1,5 | -2,6 | 1,5 | 2,0 | 1,5 | -9,1 | 1,5 | 1,2 |
| 2,0 | 0,2 | 2,0 | -5,0 | 2,0 | 0,0 | 2,0 | -4,2 | 2,0 | -0,2 | 2,0 | -13,0 | 2,0 | 0,1 |

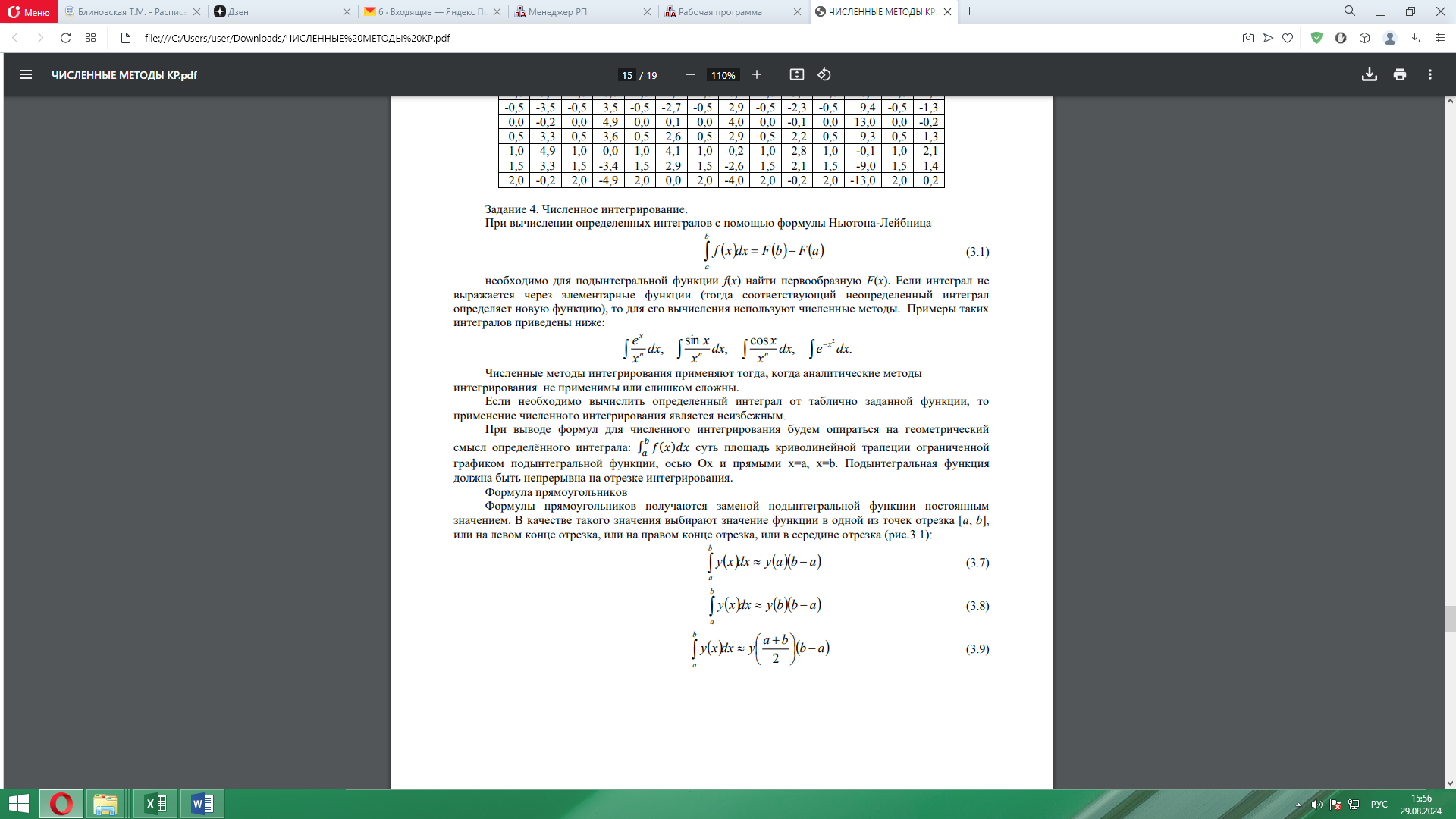
Таблица 4.17

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № 8 | | № 9 | | № 10 | | № 11 | | № 12 | | № 13 | | № 14 | |
| *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* |
| -2,0 | 0,0 | -2,0 | -4,8 | -2,0 | -0,1 | -2,0 | -4,2 | -2,0 | 0,1 | -2,0 | -13,1 | -2,0 | -0,1 |
| -1,5 | -3,6 | -1,5 | -3,4 | -1,5 | -2,9 | -1,5 | -2,6 | -1,5 | -1,9 | -1,5 | -9,4 | -1,5 | -1,2 |
| -1,0 | -4,9 | -1,0 | -0,2 | -1,0 | -4,2 | -1,0 | -0,1 | -1,0 | -2,8 | -1,0 | 0,0 | -1,0 | -1,8 |
| -0,5 | -3,4 | -0,5 | 3,7 | -0,5 | -2,9 | -0,5 | 2,7 | -0,5 | -1,9 | -0,5 | 9,0 | -0,5 | -1,4 |
| 0,0 | -0,1 | 0,0 | 5,1 | 0,0 | -0,2 | 0,0 | 3,8 | 0,0 | -0,1 | 0,0 | 13,2 | 0,0 | 0,1 |
| 0,5 | 3,4 | 0,5 | 3,6 | 0,5 | 2,7 | 0,5 | 3,1 | 0,5 | 2,1 | 0,5 | 9,0 | 0,5 | 1,2 |
| 1,0 | 4,9 | 1,0 | -0,1 | 1,0 | 3,9 | 1,0 | -0,1 | 1,0 | 3,1 | 1,0 | 0,2 | 1,0 | 1,8 |
| 1,5 | 3,5 | 1,5 | -3,4 | 1,5 | 2,6 | 1,5 | -2,8 | 1,5 | 2,0 | 1,5 | -9,4 | 1,5 | 1,6 |
| 2,0 | 0,1 | 2,0 | -5,2 | 2,0 | 0,2 | 2,0 | -4,1 | 2,0 | 0,1 | 2,0 | -13,0 | 2,0 | -0,1 |

Таблица 4.18

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № 15 | | № 16 | | № 17 | | № 18 | | № 19 | | № 20 | | № 21 | |
| *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* | *t* | *y* |
| -2,0 | -0,2 | -2,0 | -4,9 | -2,0 | -0,1 | -2,0 | -4,1 | -2,0 | -0,1 | -2,0 | -13,2 | -2,0 | 0,1 |
| -1,5 | -3,5 | -1,5 | -3,5 | -1,5 | -2,9 | -1,5 | -3,0 | -1,5 | -2,1 | -1,5 | -9,2 | -1,5 | -1,3 |
| -1,0 | -5,2 | -1,0 | 0,0 | -1,0 | -4,2 | -1,0 | -0,1 | -1,0 | -3,2 | -1,0 | 0,1 | -1,0 | -2,2 |
| -0,5 | -3,5 | -0,5 | 3,5 | -0,5 | -2,7 | -0,5 | 2,9 | -0,5 | -2,3 | -0,5 | 9,4 | -0,5 | -1,3 |
| 0,0 | -0,2 | 0,0 | 4,9 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 4,0 | 0,0 | -0,1 | 0,0 | 13,0 | 0,0 | -0,2 |
| 0,5 | 3,3 | 0,5 | 3,6 | 0,5 | 2,6 | 0,5 | 2,9 | 0,5 | 2,2 | 0,5 | 9,3 | 0,5 | 1,3 |
| 1,0 | 4,9 | 1,0 | 0,0 | 1,0 | 4,1 | 1,0 | 0,2 | 1,0 | 2,8 | 1,0 | -0,1 | 1,0 | 2,1 |
| 1,5 | 3,3 | 1,5 | -3,4 | 1,5 | 2,9 | 1,5 | -2,6 | 1,5 | 2,1 | 1,5 | -9,0 | 1,5 | 1,4 |
| 2,0 | -0,2 | 2,0 | -4,9 | 2,0 | 0,0 | 2,0 | -4,0 | 2,0 | -0,2 | 2,0 | -13,0 | 2,0 | 0,2 |

Задание 4. Численное интегрирование.





*a*



*b*



*a*



*b*



*a*



*b*



*y*



*x*



*x*



*x*



*y*



*y*



а)

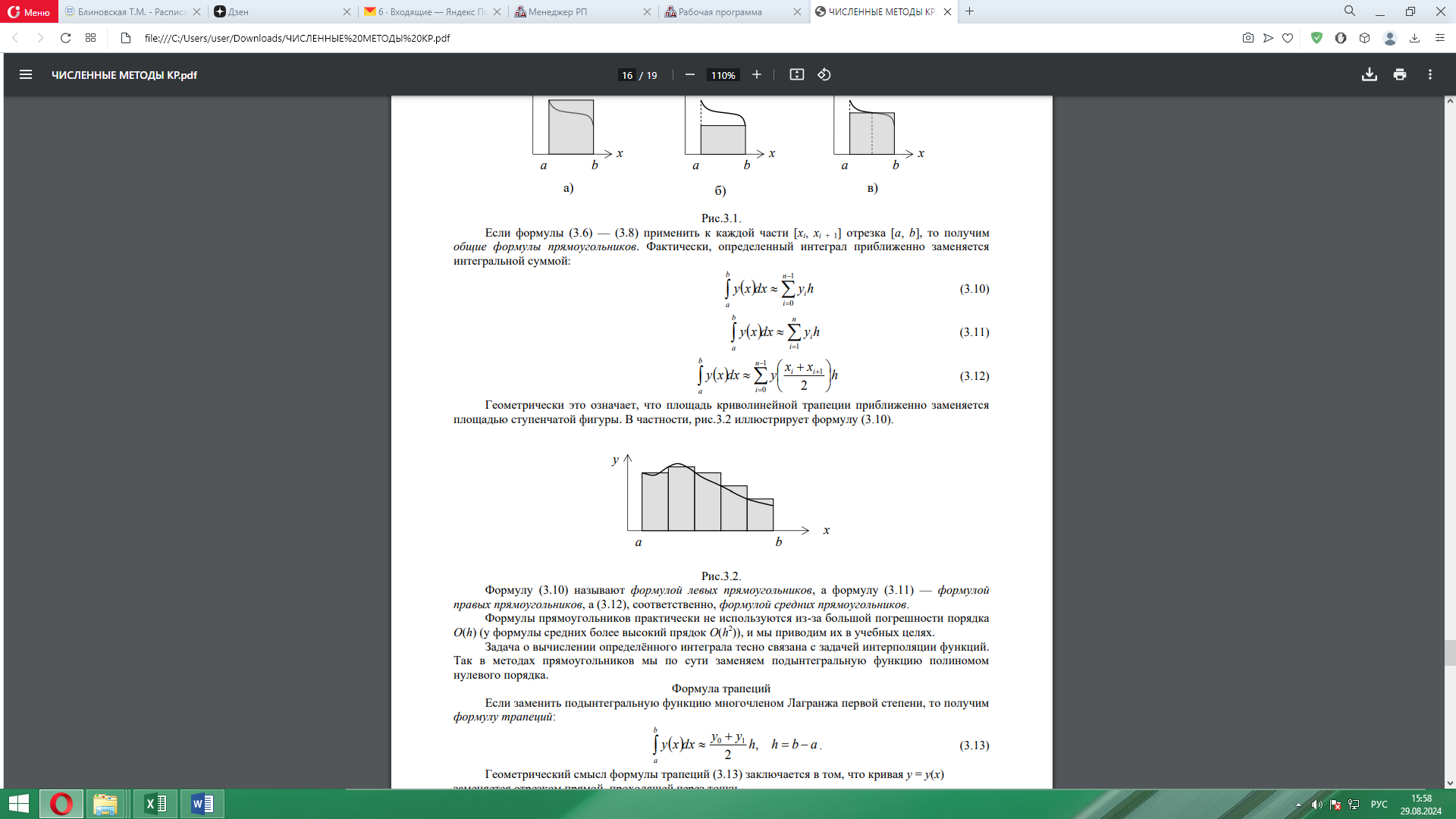


б)



в)

Рис.3.1.

Если формулы (3.6) — (3.8) применить к каждой части [*xi*, *xi* + 1] отрезка [*a*, *b*], то получим *общие формулы прямоугольников*. Фактически, определенный интеграл приближенно заменяется интегральной суммой:

Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью ступенчатой фигуры. В частности, рис.3.2 иллюстрирует формулу (3.10).



*a*



*b*



*x*



*y*

Рис.3.2.

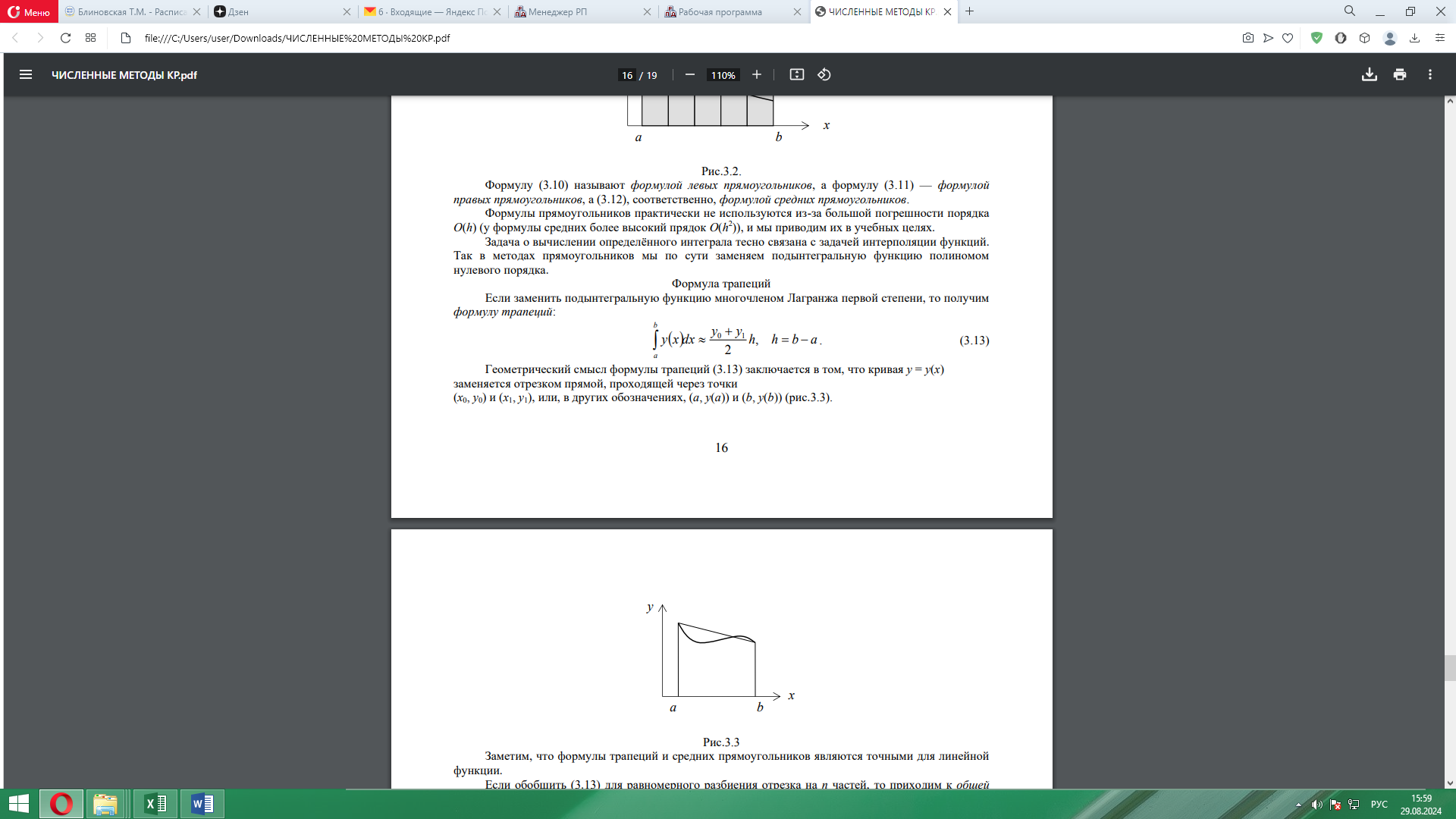
Формулу (3.10) называют *формулой левых прямоугольников*, а формулу (3.11) — *формулой правых прямоугольников*, а (3.12), соответственно, *формулой средних прямоугольников*.

Формулы прямоугольников практически не используются из-за большой погрешности порядка *O*(*h*) (у формулы средних более высокий прядок *O*(*h*2)), и мы приводим их в учебных целях.

Задача о вычислении определённого интеграла тесно связана с задачей интерполяции функций. Так в методах прямоугольников мы по сути заменяем подынтегральную функцию полиномом нулевого порядка.

Формула трапеций

Если заменить подынтегральную функцию многочленом Лагранжа первой степени, то получим *формулу трапеций*:





*a*



*b*



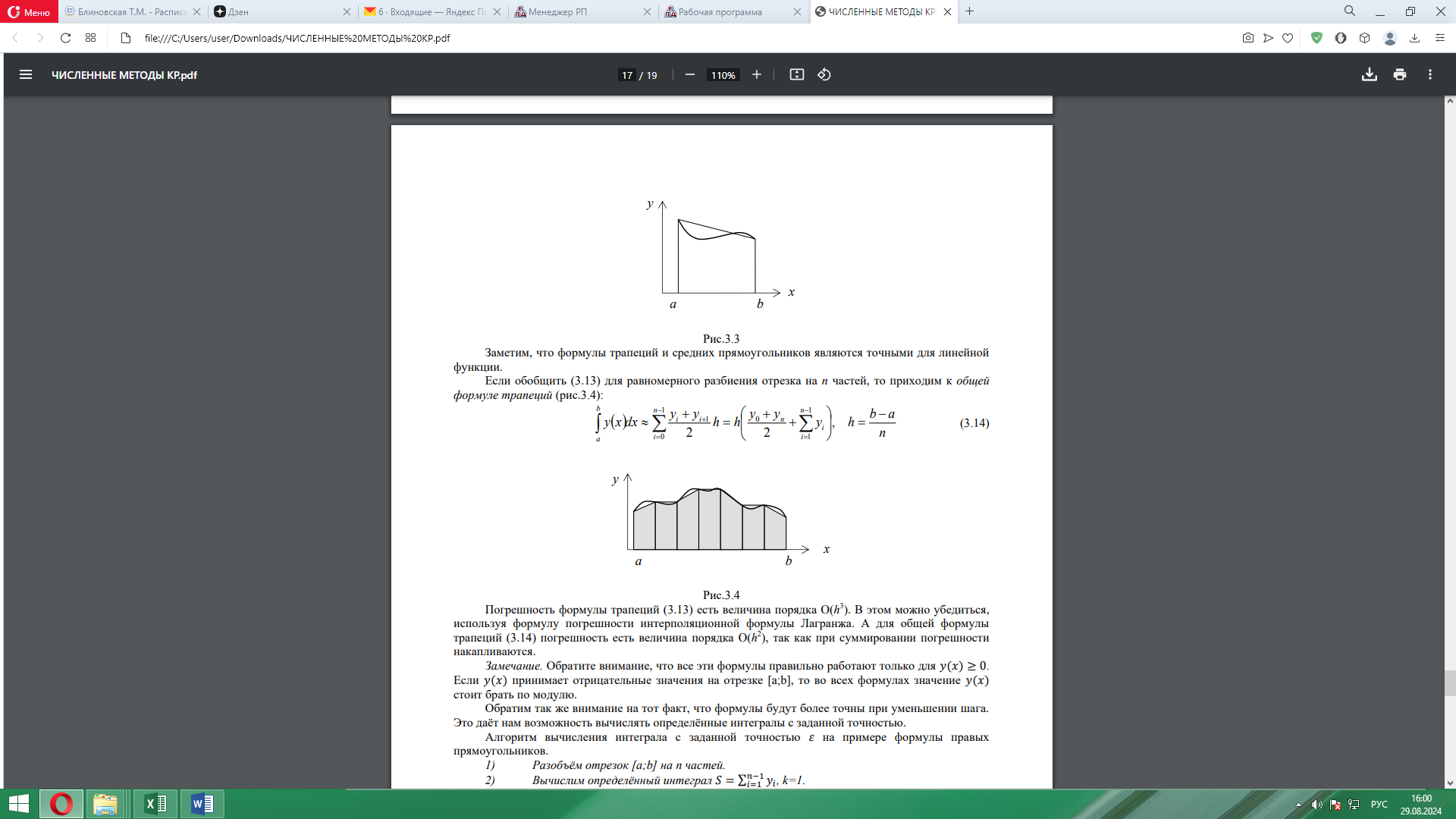
*x*



*y*

Рис.3.3

Заметим, что формулы трапеций и средних прямоугольников являются точными для линейной функции.



Погрешность формулы трапеций (3.13) есть величина порядка O(*h*3). В этом можно убедиться, используя формулу погрешности интерполяционной формулы Лагранжа. А для общей формулы трапеций (3.14) погрешность есть величина порядка O(*h*2), так как при суммировании погрешности накапливаются.

*Замечание.* Обратите внимание, что все эти формулы правильно работают только для 𝑦(𝑥) ≥ 0. Если 𝑦(𝑥) принимает отрицательные значения на отрезке [a;b], то во всех формулах значение 𝑦(𝑥) стоит брать по модулю.

Обратим так же внимание на тот факт, что формулы будут более точны при уменьшении шага. Это даёт нам возможность вычислять определённые интегралы с заданной точностью.

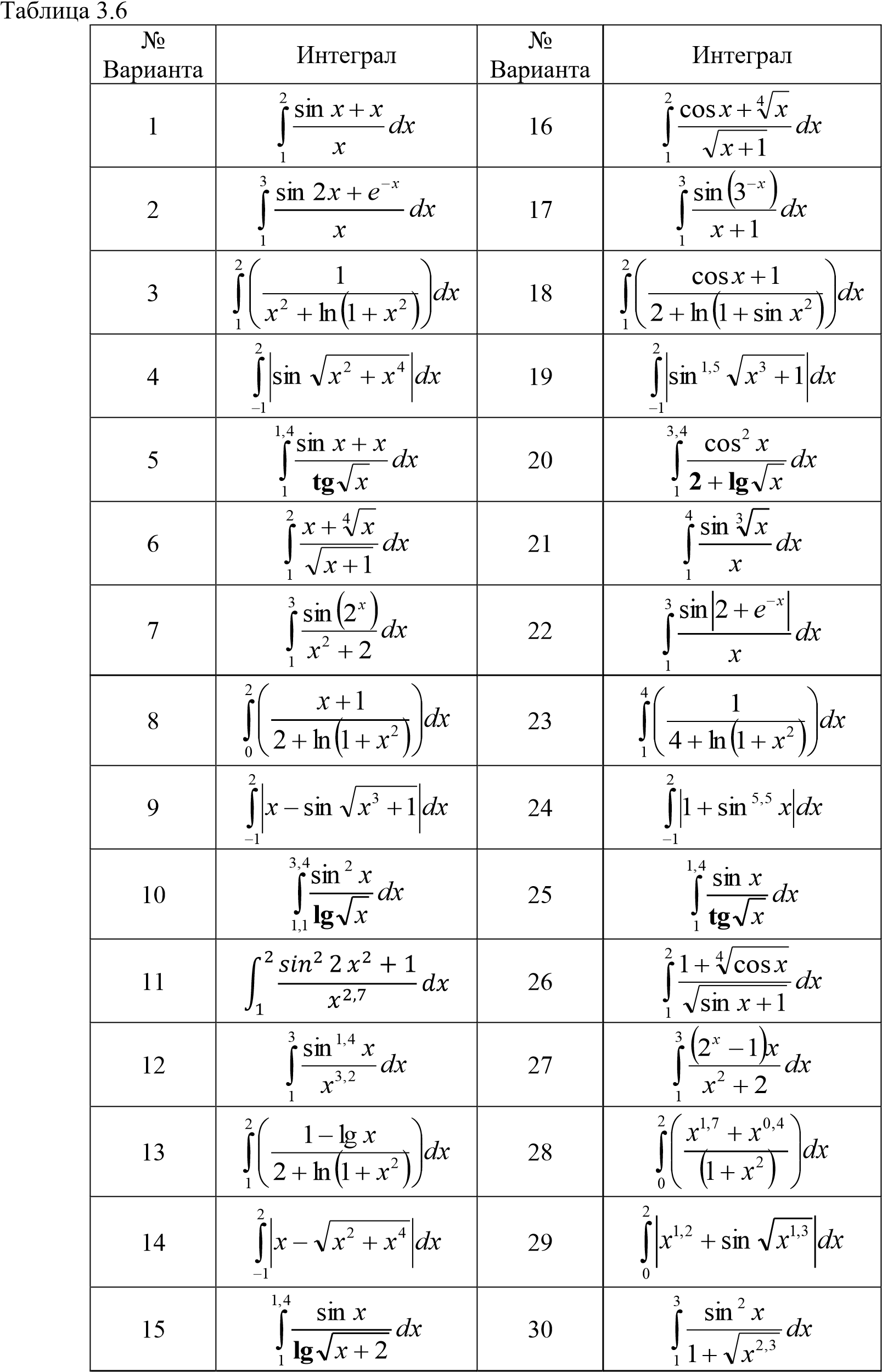
Алгоритм вычисления интеграла с заданной точностью 𝜀 на примере формулы правых прямоугольников.

1. *Разобъём отрезок [a;b] на n частей.*
2. *Вычислим определённый интеграл* 
3. 𝑛 = 𝑛 ∗ 2*; k=k+1*
4. 
5. *Если* |𝑆𝑘 − 𝑆𝑘−1| ≥ 𝜀*, то п.3 6) Вывод* 𝑆𝑘*.*

*7) Конец.*

Задания для самостоятельной работы.

1. Вычислить определенный интеграл с точностью ε=0,1 в Excel и с точностью ε=10-7 с помощью программы методами правых, левых и центральных прямоугольников и трапеций. Вариант задания выбрать из таблицы 3.6.



Литература

1. Соболь Б.В., Месхи Б.Ч., Пешхоев И.М. Практикум по вычислительной математике. Ростовна-Дону, Феникс, 2020. – 262 c.
2. Численные методы / Под ред. Лапчика М.П.. - М.: Academia, 2019. - 608 c.
3. Бахвалов, Н.С. Численные методы. Решения задач и упражнения: Учебное пособие / Н.С. Бахвалов, А.А Корнев, Е.В. Чижонков. - М.: Бином, 2019. - 352 c.
4. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях: Учебное пособие /

Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. - М.: Бином, 2019. - 240 c.

1. Вабищевич, П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. Практическое применение численных методов при использовании алгоритмического языка PYTHON / П.Н. Вабищевич. - М.: Ленанд, 2019. - 320 c.
2. Гулин, А.В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях: Учебное пособие / А.В. Гулин, В.А. Морозова, О.С. Мажорова. - М.: Инфра-М, 2019. - 432 c